Corrigé

1. a. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur cet ensemble. Et, pour tout réel x, $f'(x) = 1 + (xe^{-x})' = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} + 1$.

   b. De la même manière, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$.

   b. Pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 2$.
   Ainsi, f'' est négative sur $]-\infty; 2]$ et positive sur $[2; +\infty[$.
   Donc f' est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

   c. La fonction f' admet un minimum en $x = 2$ qui vaut $f'(2) = 1 + (1-2)e^{-2} = 1 - e^{-2} \approx 0,86$.
   Ainsi, pour tout réel x, on a $f'(x) \geqslant f'(2) > 0$.

   d. Comme $f'(x) > 0$ pour tout réel x, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	+
Variations de f	$-\infty \nearrow +\infty$

   e. On a $f(0) = 0 + 1 + 0 \times e^{-0} = 1$ et $f'(0) = 1 + (1-0)e^{-0} = 1 + e^0 = 2$.
   Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

   f. Comme f'' est négative sur $]-\infty; 2]$, on en déduit que f est concave sur $]-\infty; 2]$ donc, sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de toutes ses tangentes. En particulier, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de sa tangente au points d'abscisse 0.
   Ainsi, pour tout réel $x \leqslant 2$, on a $f(x) \leqslant 2x + 1$.

2. a. $f(x) = 2 \Leftrightarrow x + 1 + xe^{-x} = 2 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

   b. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet ensemble. Pour tout réel $x \in [0; 1]$, $h'(x) = \dfrac{e^x \times (e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.
   Or, pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$. D'où $h'(x) > 0$.

x	0	1
Signe de $h'(x)$	+	
Variations de h	$\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{e^1}{e^1+1}$

c. On a $\dfrac{1}{2} \geqslant 0$ et $\dfrac{e^1}{e^1+1} \approx 0,73 \leqslant 1$. Ainsi, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$.